

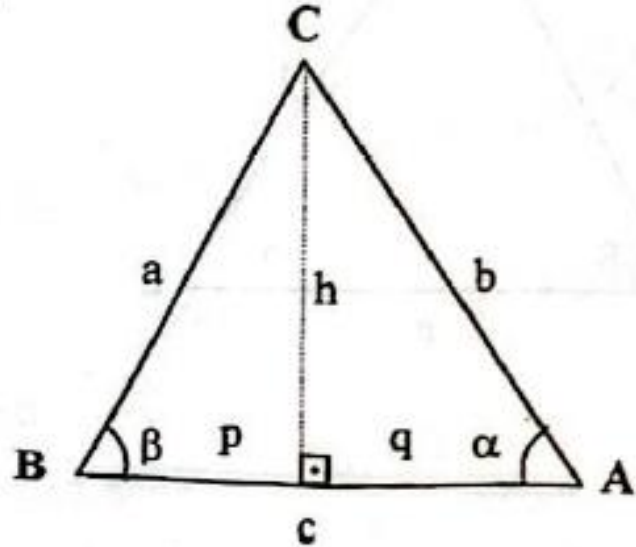
JEODEZİK HESAP DERSİ

DERS NOTLARI 2.KISIM

2024-2025 Eğitim Öğretim Güz Dönemi



Üç Kenarı Bilinen Üçgenin Yüksekliği ve Yüksekliğin Tabandan Ayırdığı Parçaların Hesaplanması



Verilenler: a, b, c
İstenenler: h, p, q
 $p + q = c$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$p = a \cdot \cos\beta$$

$$p = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}$$

$$q = b \cdot \cos\alpha$$

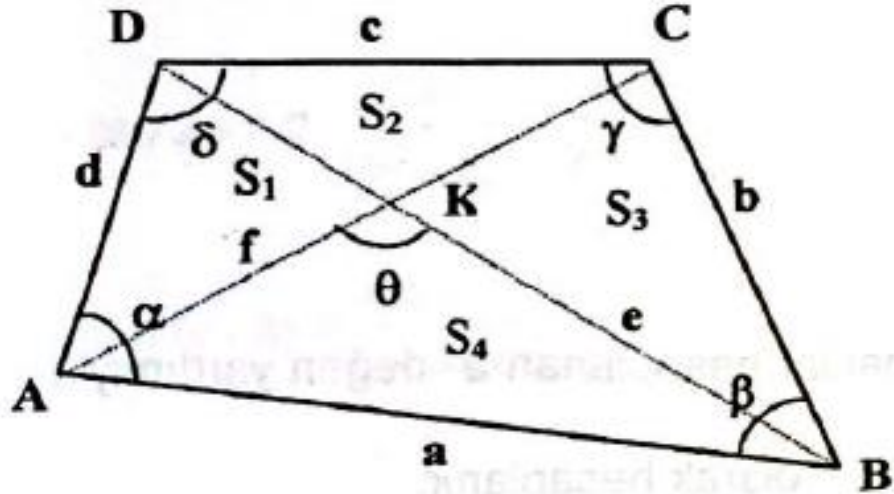
$$q = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$$

$$q = c - p$$

$$h = \sqrt{b^2 - q^2} = \sqrt{a^2 - p^2}$$

DÖRTGENLER

- Dörtgenler dört köşesi ve dört kenarı bulunan çokgenlerdir.



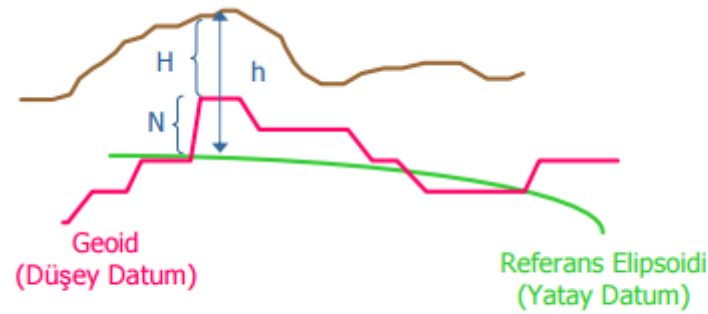
Özellikleri :

- 1) İç açılarının toplamı : 400 grad
 $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 400^\circ$
- 2) Dış açılarının toplamı : 1200 grad
- 3) İki köşegeni vardır (e,f)
- 4) $|AC| = f$ ve $|BD| = e$ ve köşegenler arasındaki açı θ ise ABCD dörtgeninin alanı $F = \frac{1}{2} e f \sin \theta$

KOORDİNAT SİSTEMLERİ

- Harita modern ve gelişmiş toplumlarda yaşayanların yerin kullanımı ve planlanması için kullanmaları zorunlu olan bir araçtır.
- Dünyada haritacılığın gelişimi İlkçağ, ortaçağ ve yeniçağ olarak üç aşamada incelenmektedir.
- İlkçağ haritacılığının MÖ 4000 yıllarında başladığı düşünülmektedir. Babil kentinin bu dönemden kalan tablet üzerine çizilmiş bir haritası bulunmuştur.
- Ortaçağ haritacılığında ise Hristiyan topografyası ve kozmoponisis yer almaktadır.
- Yeniçağların başında ise yeni keşifler ve modern kıtalar haritacılık için daha sağlıklı çizimler yapılmasını sağlamıştır.

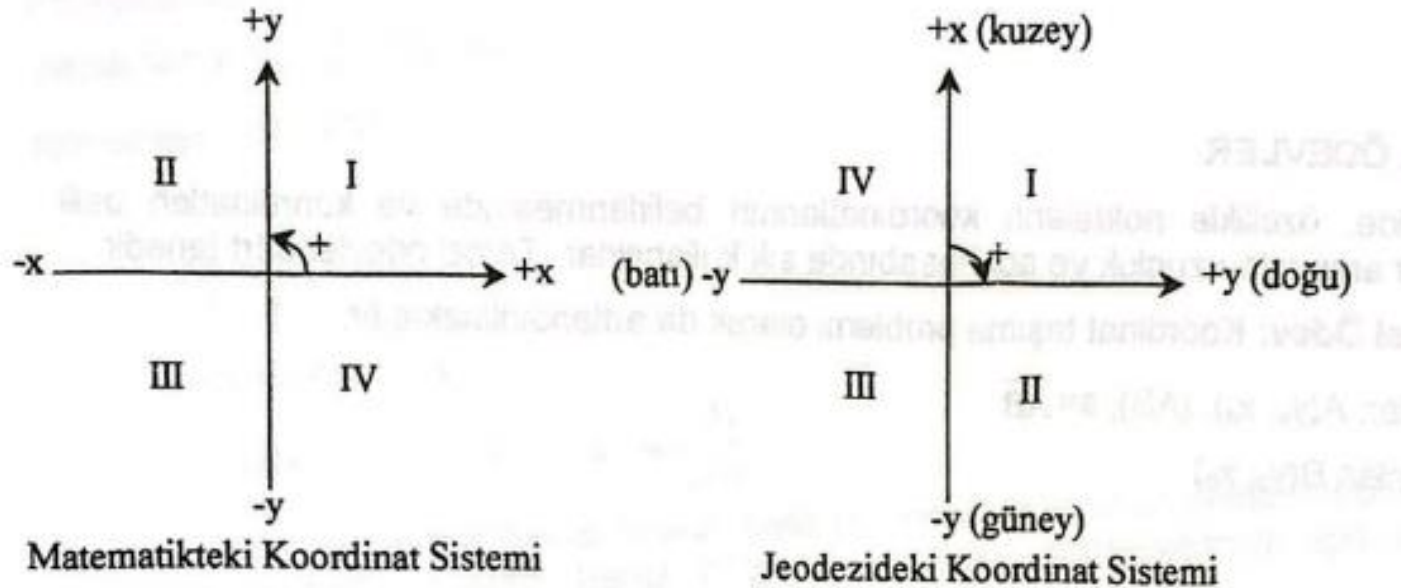
- Herhangi bir noktanın yatay ve düşey olarak yeryüzünde konumunu belirleyebilmek için referans olarak alınan yüzey datum yüzeyidir. Datum yüzeyi aynı zamanda referans sistemini de tanımlamaktadır. Jeodezik datum yüzeyi yatay datum ve düşey datum olarak ikiye ayrılmıştır.
- Yatay datum yatay koordinatlar için alınan referans yüzeyidir.
- Düşey datum yükseklikler için alınan referans yüzeyidir.



- Yeryüzündeki noktaların tanımlanabilmesi için kullanılan referans koordinat sisteminde kabul edilen başlangıca **datum** denilmektedir.
- Arazi veya harita üzerindeki bir noktanın yerini bulmak için referans koordinat sistemi tanımlanır. Bunun devamında dünyanın şekline en uygun elipsoid ve datum seçilir.
- Seçilen bu datuma ED-50 , ITRF, WGS-84 gibi kısa isimler verilir.

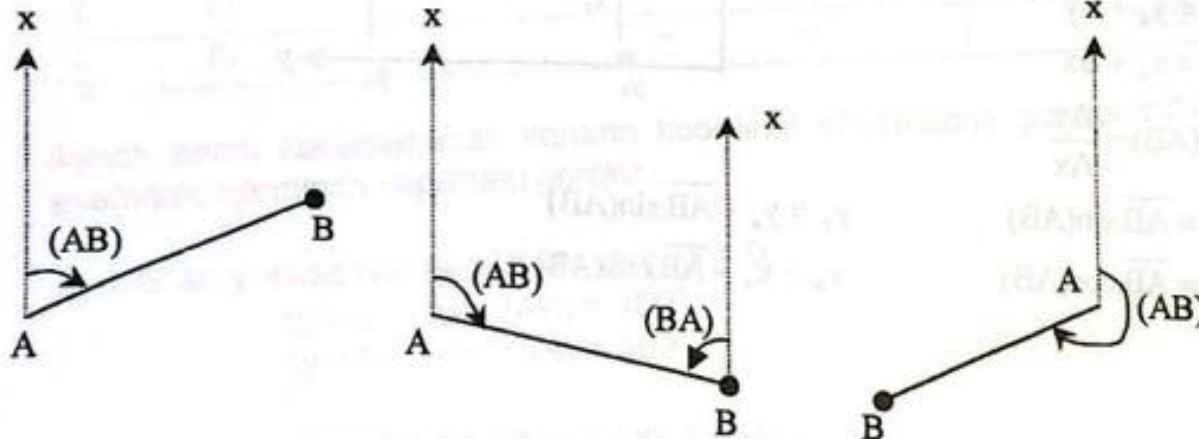
- Jeodezik koordinat sistemi matematik koordinat sisteminden farklılık göstermektedir. Jeodezik ölçme aletlerinde açılar saat ibresi yönünde arttığı için jeodezik koordinat eksenlerinin adları değiştirilmiştir.
- Açıların pozitif artma yönü matematik koordinat sisteminde saat ibresinin tersi yönünde, jeodezik koordinat sisteminde ise saat ibresi yönündedir.

- Bu iki zıtlık sayesinde trigonometride kullanılan bütün eşitlikler jeodezik koordinat sisteminde de kullanılabilmektedir.
- Her iki sistemde de açılar $+x$ ekseninden başlamaktadır.



AÇIKLIK AÇISI (SEMT AÇISI)

- Bir kenarın ya da doğrultunun x eksenini ile (kuzey ile) saat ibresi yönünde yapmış olduğu açıdır ve (AB) şeklinde gösterilir.
- Anlamı A'dan B'ye giden doğrultunun x eksenini ile saat ibresi yönünde yapmış olduğu açıdır.
- (AB) açısı her durumda 400 graddan küçüktür ve 0 graddan büyüktür ve eşittir. Karşılıklı semt açıları arasında (AB) ile (BA) arasında 200 grad fark vardır.



KÜRESEL TRİGONOMETRİ

- Küresel trigonometri denildiğinde küre yüzeyinde üçgen hesabı anlaşılmaktadır. Benzer şekilde elipsoid yüzeyinde trigonometriden de bahsedilebilir. Trigonometri jeodezik hesaplamaların dayanağını oluşturmaktadır.
- Jeodezik hesaplamaların hangi yüzey üzerinde yapılacağı önemlidir.

TANIMLAR

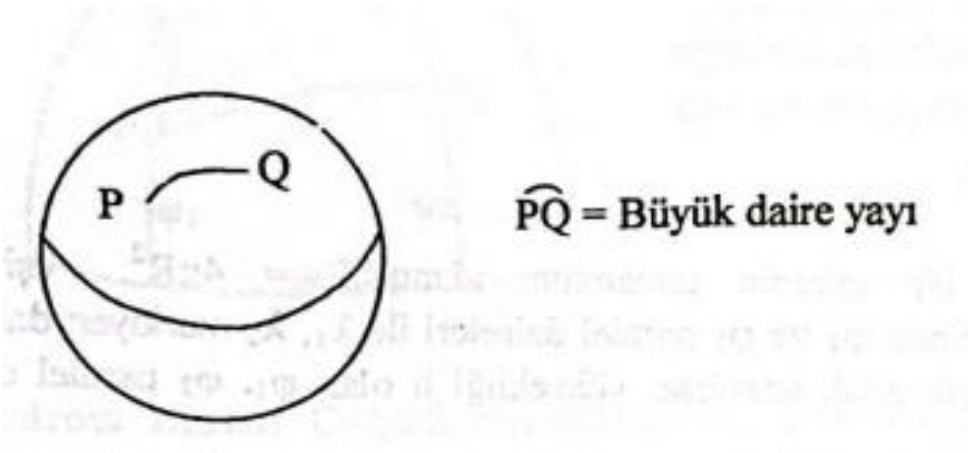
- **Küre:** Uzayda bir O noktasından uzaklıkları sabit R olan noktaların geometrik yüzeyi küre olarak tanımlanır.
- O merkezinin koordinatları (x_0, y_0, z_0) olan ve yarıçapı R olan bir kürenin denklemi aşağıdaki gibidir.

$$(X - x_0)^2 + (Y - y_0)^2 + (Z - z_0)^2 = R^2$$

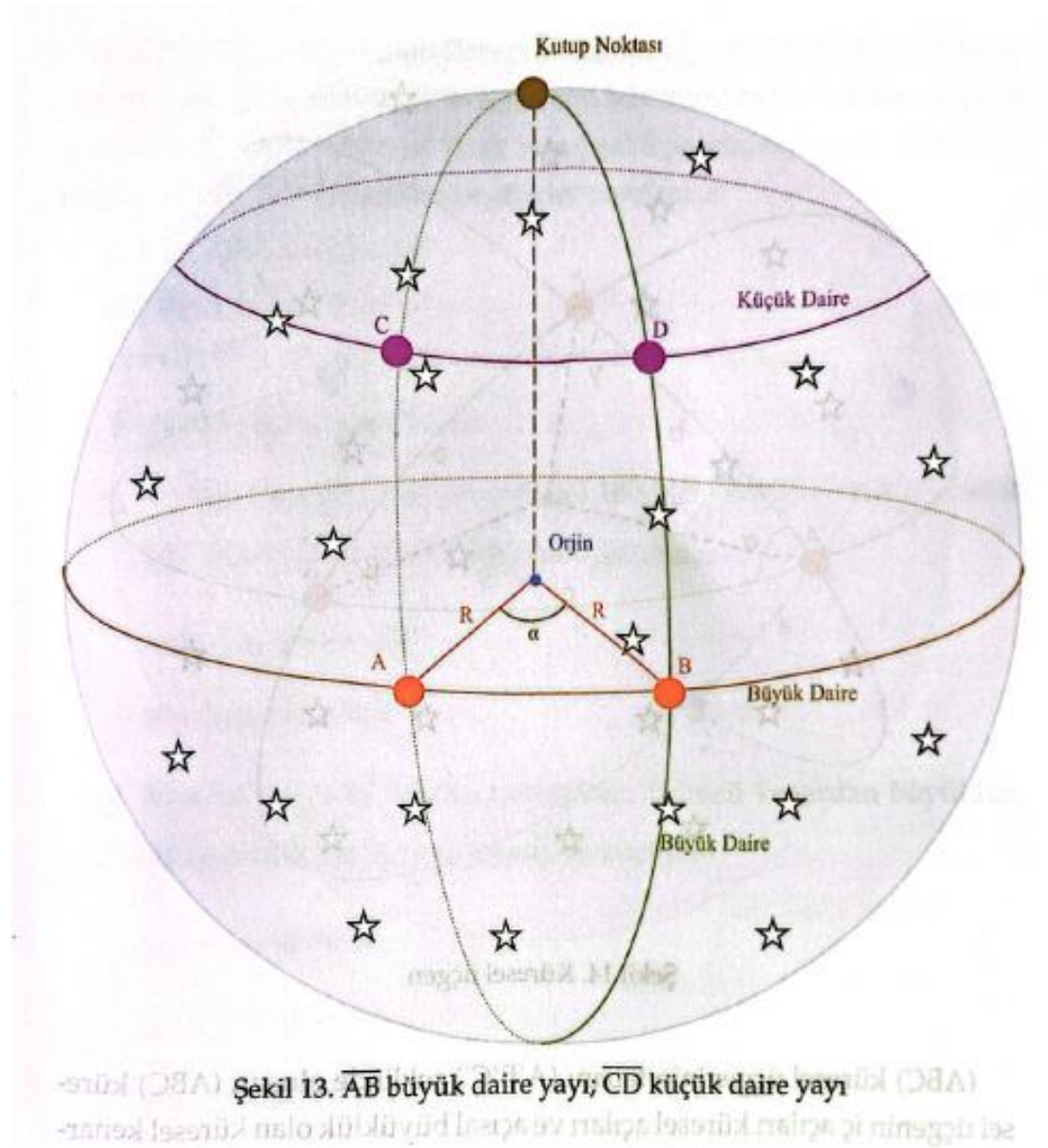
- Merkezi orjinde olan ve yarıçapı R olan kürenin denklemi

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2$$

- **Kürenin alanı;** $F = 4\pi R^2$
- **Kürenin hacmi;** $V = \frac{4}{3}\pi R^3$
- **Büyük Daire:** Küre yüzeyi üzerinde iki noktayı tek anlamlı olarak birleştiren ve aynı zamanda en kısa uzaklık büyük daire yayıdır. Kürenin merkezinden geçen bir düzlemle ara kesitidir. Büyük dairenin yarıçapı kürenin yarıçapına eşittir.



- **Küçük Daire:** Kürenin merkezinden geçmeyen bir düzlemle ara kesitidir. Enlem daireleri gibi.
- **Küresel Uzaklık:** Küre yüzeyinde iki noktayı birleştiren büyük daire yayının kısa olan parçasıdır.
- **Küresel Açı:** Küre üzerindeki iki büyük daire yayı arasındaki açıklığa küresel açı denir. Bu açı her iki büyük daire düzlemleri arasındaki ölçek açısı ile ölçülür.



Küre Üzerinde Meridyen Yayı Hesabı

- Küre üzerinde meridyen yayı hesabı, meridyen dairesinin geometrisi R yarıçaplı bir çember olduğu için merkez açığı gören yay eşitliğinden bulunur.
- Örneğin 1 derecelik meridyen yayı (b) küresinin her yerinde eşit olup aşağıdaki formül ile hesaplanır.

$$b = \frac{\alpha}{\rho} R$$

- R=6370 km değeri alındığında 1 derecelik meridyen yayının uzunluğu 111,1774734 km olur.

Küre Üzerinde Paralel Daire Yayı Hesabı

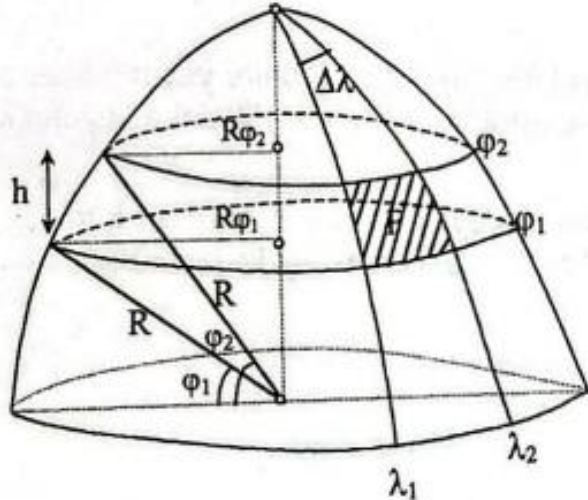
- Küre üzerinde paralel daire yayı hesabı yapmak için önce paralel dairenin yarıçapı R_φ bulunur. φ enlemlili paralel dairenin yarıçapı

$$R_\varphi = R \cos \varphi$$

ile bulunur. Paralel dairenin yarıçapı bulunduğundan sonra yine merkez açığı gören yay eşitliğinden paralel daire yayı hesaplanır.

Küre Üzerinde Alan Hesabı

- R yarıçaplı bir kürenin tamamının alanı $F = 4\pi R^2$ eşitliğinden hesaplanabilmektedir. Küre üzerinde φ_1 ve φ_2 paralel daireleri ile; λ_1 , λ_2 meridyen dairelerinin sınırladığı gridin (F) alanı hesaplanmak istenirse, yüksekliği h olan φ_1 , φ_2 paralel dairelerin sınırladığı küre kuşağının s alanı,



$$\begin{aligned}s &= 2\pi R h \\h &= R(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) \\h &= 2R \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} \\s &= 4\pi R^2 \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}\end{aligned}$$

İstenen F grid alanı;

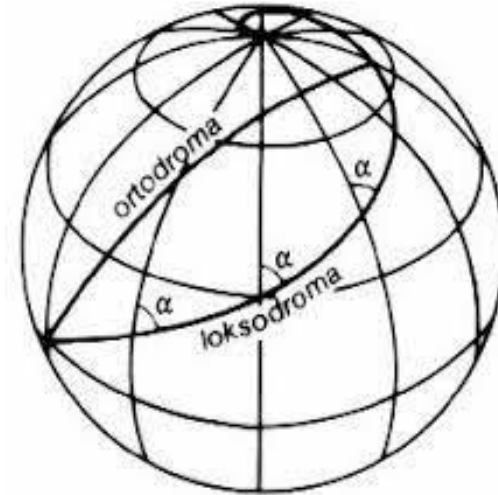
$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$$

$$F = s \frac{\Delta\lambda}{2\pi}$$

$$F = 2R^2 \frac{\Delta\lambda^\circ}{\rho^\circ} \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}$$

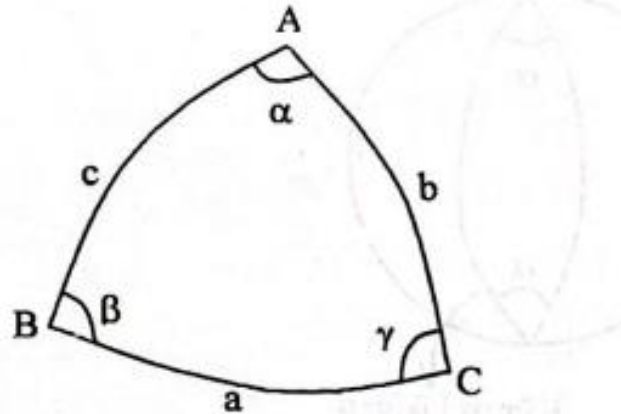
Küre Üzerinde Özel Eğriler

- **Ortodrom Eğrisi:** Küre üzerinde herhangi iki noktayı birleştiren büyük daire yayı ortodrom eğrisi olarak da adlandırılır. Bu büyük dairelerden karakteristik olanları meridyen ve ekvator daireleridir. Paralel daireler büyük daire değildir.
- **Loksodrom Eğrisi:** Coğrafi koordinatlarıyla bilinen $P_1(\varphi_1, \lambda_1)$ ve $P_2(\varphi_2, \lambda_2)$ noktalarını birleştiren eğri meridyen doğrularıyla hep sabit bir α açısı yapıyorsa bu eğriye loksodrom eğrisi denir.



KÜRESEL ÜÇGEN

- Küre üzerinde üç nokta büyük daire yayları ile birleşirse bir küresel üçgen meydana gelir.
- Küresel üçgen 3 iç küresel açı (α, β, γ), 3 açısal küresel kenar (a, b, c) olmak üzere 6 temel elemanı vardır. Çözüm küresel trigonometri kullanılarak yapılır.



- Küresel üçgenin kenarlarını bu kenarları merkezde gören açı cinsinden ifade etmek mümkündür.

$$a^0 = \frac{a}{R} \rho^0 \quad b^0 = \frac{b}{R} \rho^0 \quad c^0 = \frac{c}{R} \rho^0$$

- **Euler Üçgeni:** Hiçbir kenarı ve açısı 180 dereceden büyük olmayan küresel üçgene euler üçgeni denir. Bundan sonra küresel üçgen denildiğinde euler üçgeni anlaşılacaktır. Küre üzerinde verilen A, B ve C noktalarından tek bir euler üçgeni geçirilebileceğinden euler üçgeni tek anlamlıdır.
- **Ekses (Küresel Artık):** Küresel üçgende iç açılar toplamı 180^0 'den üçgenin büyüklüğüne göre az veya çok farklı olur. Bu farka küresel ekses denir ve ε ile gösterilir.

$$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180^0$$

Küresel Üçgenin Özellikleri

- Küresel üçgenin iç açıları toplamı 180° - 540° derece, kenarları toplamı ise 0° - 360° arasındadır.

$$180^\circ < (\alpha + \beta + \gamma) < 540^\circ$$

$$0^\circ < (a + b + c) < 360^\circ$$

- Küresel üçgende iki kenarın toplamı üçüncü kenardan büyüktür, iki kenarın farkı üçüncü kenardan küçüktür.

$$(a + b) > c; (a - b) < c$$

$$(a + c) > b; (a - c) < b$$

$$(b + c) > a; (b - c) < a$$

- Bir küresel üçgende iki iç açının toplamı üçüncü açıya 180 derece eklenmesiyle oluşan açıdan küçüktür, 180 dereceden üçüncü açının çıkarılmasıyla oluşan açıdan büyüktür.

$$(180^\circ - \gamma) < (\alpha + \beta) < (180^\circ + \gamma);$$

$$(180^\circ - \beta) < (\alpha + \gamma) < (180^\circ + \beta);$$

$$(180^\circ - \alpha) < (\beta + \gamma) < (180^\circ + \alpha)$$

- Bir ikizkenar küresel üçgende taban açıları birbirine eşittir. Ya da iki açısı eşit olan küresel üçgenin bu açılar karşısındaki kenarları birbirine eşittir.

$$(a = b) \text{ ise } (\alpha = \beta) ; (\alpha = \beta) \text{ ise } (a = b)$$

- Bir küresel üçgende büyük açının karşısındaki kenar büyüktür ya da büyük kenar karşısındaki açı büyüktür.

$$(a > b) \text{ ise } (\alpha > \beta) ; (\alpha > \beta) \text{ ise } (a > b)$$

- Bir küresel üçgende iki açının toplamı 180 dereceden büyükse karşılarındaki kenarların toplamı da 180 dereceden büyüktür.

$$(a + b) \leq 180^\circ \text{ ise } (\alpha + \beta) \leq 180^\circ$$

$$(a + b) \geq 180^\circ \text{ ise } (\alpha + \beta) \geq 180^\circ$$

$$(a + b) = 180^\circ \text{ ise } (\alpha + \beta) = 180^\circ$$

- Bir küresel üçgende iki açının toplamından diğer açının farkı -180 dereceden büyük, $+180$ dereceden küçüktür.

$$-180^\circ < (-\alpha + \beta + \gamma) < 180^\circ$$

$$-180^\circ < (\alpha - \beta + \gamma) < 180^\circ$$

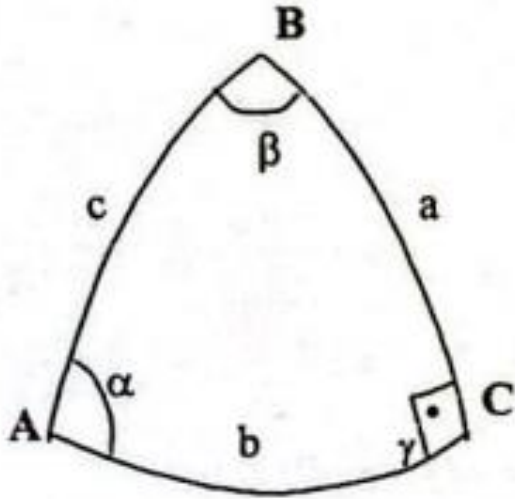
$$-180^\circ < (\alpha + \beta - \gamma) < 180^\circ$$

ÖRNEK KÜRESEL ÜÇGEN ÇÖZÜMLERİ

- Bir küresel üçgenin çözülebilmesi için üçü kenar, üçü açı olmak üzere toplam altı elemanından üçünün verilmesi yeterlidir.
- Düzlem trigonometriden farklı olarak üç açısı bilinen küresel üçgenler de çözülebilmektedir.
 - ✓ KKK
 - ✓ AAA
 - ✓ KAK
 - ✓ AKA
 - ✓ KKA (çözüm çift anlamlıdır)
 - ✓ AAK (çözüm çift anlamlıdır)

KÜRESEL DİK ÜÇGEN

- Yalnız bir açısı dik olan küresel üçgene küresel dik üçgen, bu açının karşısındaki kenara da hipotenüs diyoruz. (Bir küresel üçgende birden fazla dik açı olabilir.)



$$C = \gamma = 90^\circ \text{ ise}$$

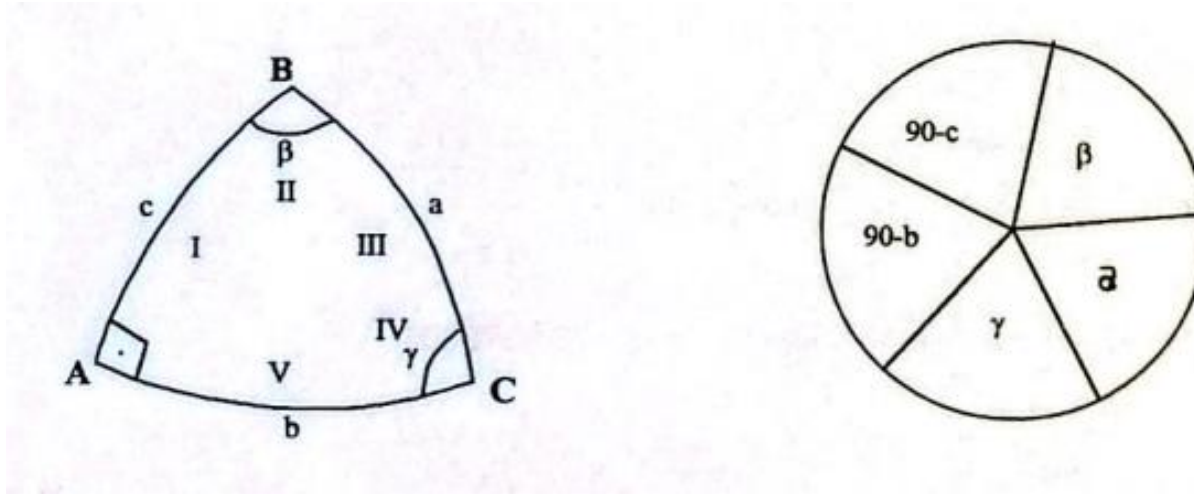
c kenarı : hipotenüs
a ve b :dik kenarlar

$$\text{ekses } \epsilon = \alpha + \beta - \frac{\pi}{2}$$

KÜRESEL DİK ÜÇGENLERDE NEPER KURALI

- Bir küresel dik üçgende dik açıyı atlamak ve dik kenarlar yerine de tümleri (90 dereceye tamamlayan değeri) alınır, geriye kalan beş eleman saat ibresi veya tersi yönünde numaralanırsa , Neper kuralı olarak;
- Bir küresel dik üçgenin herhangi bir elemanının kosinüsü,
 - Kendisine komşu olan elemanların kotanjantları çarpımına,
 - Kendisine komşu olmayan elemanların sinüsleri çarpımına eşittir.

- Elemanların komşuluk ilişkileri çizilecek 5 dilimli daire üzerinden de rahatlıkla görülebilir.



- ABC dik üçgeninin elemanları dik açı hariç, c kenarından itibaren saat ibresi yönünde 5'e kadar numaralandırılmıştır. Bu numaralandırma sonunda ;

$$\beta \rightarrow I \quad a \rightarrow II \quad \gamma \rightarrow III \quad b \rightarrow IV \quad c \rightarrow V$$

- β elemanı için Neper kuralını uygularsak;

$$\begin{aligned}\cos \beta &= \cot (90-c) \cot \alpha = \tan c \cot \alpha \\ \cos \beta &= \sin (90-b) \sin \gamma = \cos b \sin \gamma\end{aligned}$$

- $(90-c)$ elemanı için Neper kuralını uygularsak;

$$\begin{aligned}\cos (90-c) &= \cot (90-b) \cot \beta \\ \sin c &= \tan b \cot \beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos (90-c) &= \sin a \sin \gamma \\ \sin c &= \sin a \sin \gamma\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos a &= \cot \beta * \cot \gamma \\ \cos a &= \cos b * \cos c\end{aligned}$$

GAUSS KÜRESİ

- Yeryüzünün belli bir bölgesinde yapılacak jeodezik hesaplamalarda elipsoid yerine o bölge için hesaplanacak Gauss küresi üzerinde yapılır.
- Gauss küresi çalışma bölgesinde elipsoid yüzeyi ile çok iyi uyum sağlar.
- Elipsoid yerine Gauss küresinin alınması nedeniyle hesaplamalarda ortaya çıkacak farklar pratik olarak ihmal edilecek düzeydedir.

$$R_g = \sqrt{MN} = \frac{b}{1 - e^2 \sin^2 B} \quad \bullet \quad \text{Gauss küresi yarıçapı}$$

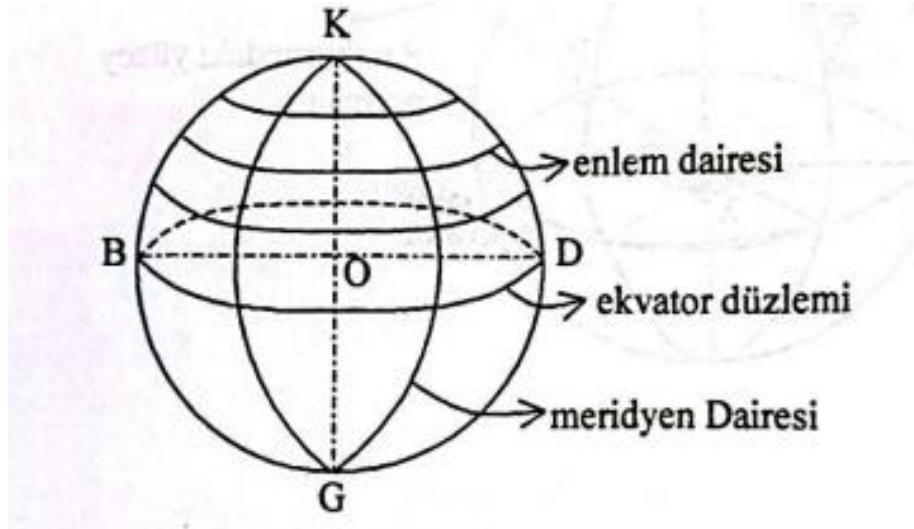
- Hayford elipsoidinin küçük yarı eksen $b = 6359911.94613$
- Hayford elipsoidinin I.eksentrisitesi $e^2 = 0.00672267002333$
- B: Coğrafi enlem
- Örnek: $B = 40^\circ$ için R_g değeri nedir?

KÜRESEL KOORDİNAT SİSTEMLERİ

- Küresel koordinat sistemleri küre yüzeyindeki noktaların konumlarını belirlemeye ve noktalar arasında çeşitli hesaplamaları (doğrultu, uzunluk gibi) yapmaya olanak sağlar.
- Küresel koordinat sistemlerini dört grup halinde inceleyebiliriz;
 - ✓ Küresel coğrafi koordinatlar $P(\vartheta, \lambda)$
 - ✓ Global (üç boyutlu) dik koordinatlar $P(X, Y, Z)$
 - ✓ Küresel kutupsal koordinatlar $P(S, \alpha)$
 - ✓ Küresel jeodezik dik koordinatlar $P(x, y)$

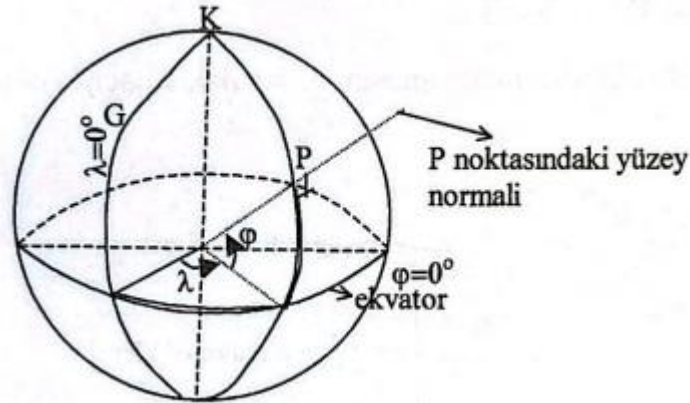
COĞRAFİ KOORDİNATLAR

- Dünya üzerindeki noktaların konumlarını belirlemek amacıyla bütün dünyayı saran bir koordinat ağı tasarlanmıştır. Dünyayı kuzey ve güney yarım küreler olarak ikiye ayıran ekvator düzlemine paralel düzlemlerin yerküre ile arakesitleri paralel daireleri oluşturur.



- Ekvatorun kuzeyinde kalan paralellere kuzey paraleli, güneyinde kalan paralellere güney paraleli denir. Paralel daireler kuzeyde ve güneyde 90'ar tane olmak üzere toplam 180 tanedir.
- Ekvatoru dik kesen, kutuplardan ve yerin merkezinden geçen düzlemlerin yerküre ile arakesitleri de meridyen dairelerini belirler. Londra'da Greenwich gözlemevinde bulunan bir gök dürbününün ekseninden geçtiği varsayılan meridyen başlangıç meridyenidir.
- Başlangıç meridyeninin doğusunda bulunanlara doğu meridyeni, batısında bulunanlara batı meridyeni denir. Meridyenler 180 tanesi doğu, 180 tanesi batı olmak üzere toplam 360 tanedir.

- Noktanın ekvatora meridyen boyunca olan uzaklığını yer merkezinde gören açıya o noktanın enlemi denir ve φ ile gösterilir.
- Bir noktadan geçen meridyen düzlemi ile başlangıç meridyen düzlemi arasında kalan açıya o noktanın boylamı denir. Boylamlar λ ile gösterilir.
- λ boylamı Greenwich'ten doğuya doğru pozitif ve batıya doğru negatif olmak üzere 0-180 derece arasında değişir.
- φ enlemi ise ekvatorдан kuzey kutbuna doğru (+), güney kutbuna doğru (-) olmak üzere 0 - 90 derece arasında değişir.



COĞRAFİ KOORDİNATLARLA TEMEL ÖDEVLERİN ÇÖZÜMÜ

- Coğrafi koordinatlarla temel ödev çözümlerinde azimut açısı (A) kullanılır. Azimut açısı bir kenarın o noktadaki meridyen doğrultusu ile saat ibresi yönünde yaptığı açıdır.
- Açıklık açısı (α) verilirse azimut açısına çevrilir. ($A = \alpha + \gamma$)

Coğrafi Koordinatlarla I.Temel Ödev

Verilenler: $P_1(\varphi_1, \lambda_1)$, s , A_{12}

İstenenler: $P_2(\varphi_2, \lambda_2)$, A_{21}

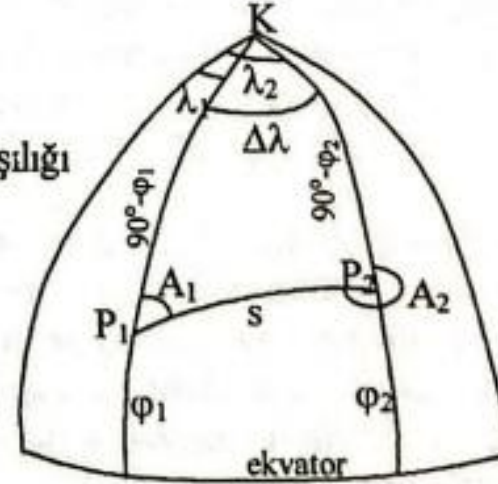
$\sigma = \frac{s}{R} \rho$ uzunluk olarak verilen kenarın açısal karşılığı

$$\varphi_2 = \arcsin(\sin \varphi_1 \cos \sigma + \cos \varphi_1 \sin \sigma \cos A_{12})$$

$$\Delta \lambda = \arctan\left(\frac{\sin A_{12}}{\cot \sigma \cos \varphi_1 - \sin \varphi_1 \cos A_{12}}\right)$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta \lambda$$

$$A_{21} = \arctan\left(\frac{\sin A_{12}}{\cos \sigma \cos A_{12} - \tan \varphi_1 \sin \sigma}\right) + \pi$$



Coğrafi Koordinatlarla II.Temel Ödev

Verilenler: $P_1(\varphi_1, \lambda_1), P_2(\varphi_2, \lambda_2)$

İstenenler: s, A_{12}, A_{21}

$$\sigma = \arccos(\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\Delta\lambda)$$

$$A_{12} = \arctan\left(\frac{\sin\Delta\lambda}{\tan\varphi_2 \cos\varphi_1 - \sin\varphi_1 \cos\Delta\lambda}\right)$$

$$A_{21} = \arctan\left(\frac{\sin\Delta\lambda}{\cos\Delta\lambda \sin\varphi_2 - \cos\varphi_2 \tan\varphi_1}\right) + \pi$$